# Sección 0.9
# Círculos

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

# Contenido

1 Definición de círculo

2 Ecuación de un círculo

# Definición de círculo

Un *círculo* es el conjunto de todos los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo $C$, llamado *centro*, es constante. La distancia de cualquier punto del círculo al centro se llama el *radio* del círculo.

# Diámetro de un círculo

El *diámetro* de un círculo es cualquier segmento de recta que pasa por el **centro** del círculo y cuyos extremos se encuentran en el borde del círculo.

El diámetro de un círculo es **dos** veces su **radio**.

# Ecuación de un círculo

Si el centro de un círculo tiene coordenadas $C(h,k)$ y su radio es $r$, se puede utilizar la definición de círculo para deducir *la ecuación de ese círculo*.

Sea $P(x,y)$ cualquier punto del círculo, entonces:

$$d(C,P) = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

La *ecuación del círculo* con centro $(h, k)$ y radio $r$ es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

En particular, cuando el centro está en el origen $(0, 0)$, la *ecuación* es:

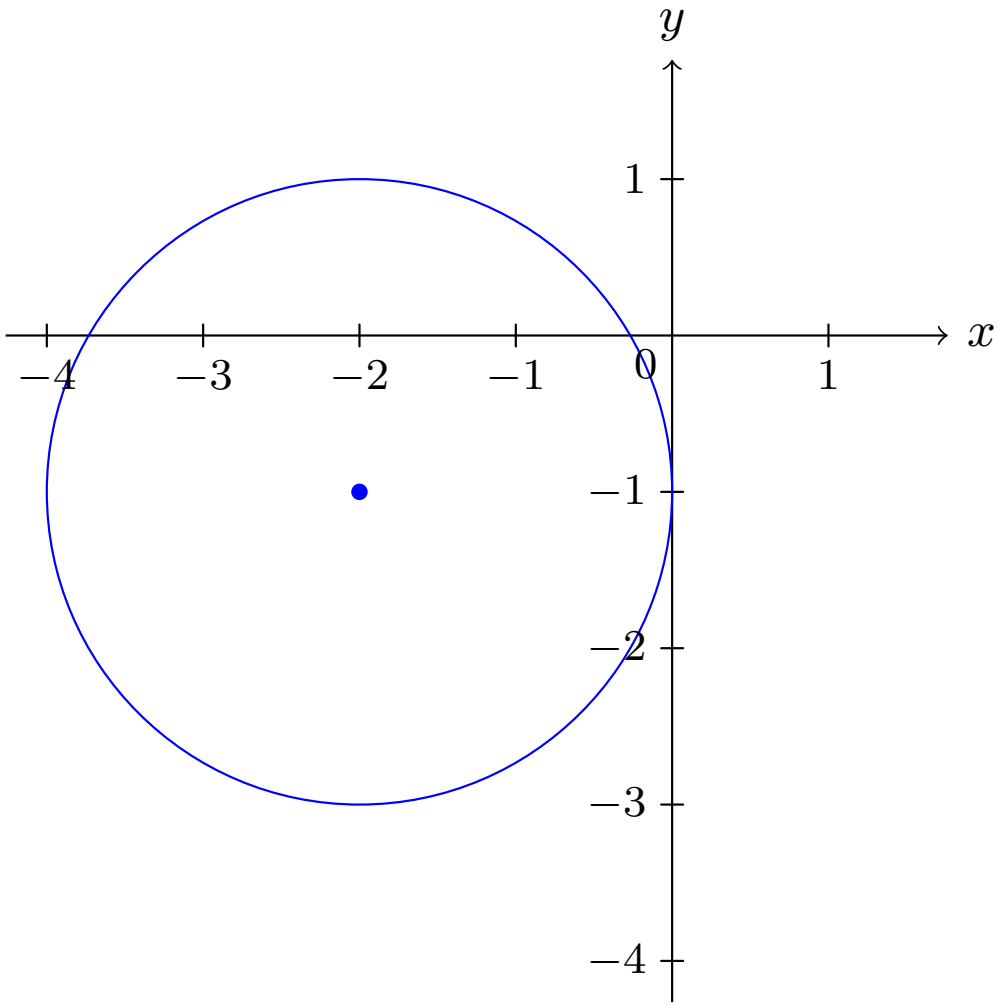
$$x^2 + y^2 = r^2$$

# Ejemplos

(a) Determine el centro y el radio del círculo que corresponde a la ecuación $x^2 + (y+2)^2 = 7$.

(b) Determine la ecuación del círculo con centro en el punto $(2, -5)$ y radio de $3$ unidades.

(c) Halle la ecuación del círculo que representa la siguiente gráfica.



(d) Determine la ecuación del círculo cuyos extremos de un diámetro son $P(1, 8)$ y $Q(5, -6)$.

# ¿Es la ecuación de un círculo?

Para determinar si una ecuación de la forma $x^2 + ax + y^2 + by = c$ es la ecuación de un círculo, debemos utilizar la técnica de completar el cuadrado para las variables $x$ y $y$.

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + by + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{a^2 + b^2}{4}$$

- Si $c + \dfrac{a^2 + b^2}{4} > 0$, entonces la ecuación representa un círculo.
- Si $c + \dfrac{a^2 + b^2}{4} = 0$, entonces la ecuación representa un punto.
- Si $c + \dfrac{a^2 + b^2}{4} < 0$, entonces la ecuación no tiene sentido y, por tanto, no representa ningún punto en el plano.

# Ejemplos

Determine si las siguientes ecuaciones representan un círculo, de serlo encuentre el centro y radio.

(a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 8$

(b) $2x^2 + 2y^2 + x + 4y = 0$

(c) $x^2 - 2x + y^2 - 4y = -5$

(d) $2x^2 + 3y^2 + 4x + 6y = 6$